Ejercicios de Análisis Matemático I

Continuidad y límite funcional

1. Estudia la continuidad de la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ dada por $f(1)=1/4$ y:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x\in[0,1[\cup]1,2] \\ E(x)-7/4 & \text{si } x\in]2,4] \end{cases} \qquad \big(E(x) \text{ es la parte entera de } x\big)$$

2. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

3. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

4. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua y verificando que $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[0,1]$. Prueba que hay algún $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=1-c^2$.

5. Prueba que hay un único número real $x>0$ tal que $\ln x+\sqrt{x}=0$.

6. Calcula la imagen de la función $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Sea $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Sean $\alpha=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\beta=\lim\limits_{x\to b} f(x)$. Prueba que $f(]a,b[)=]\alpha,\beta[$.

8. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(0)=0$. Justifica, haciendo uso de las propiedades de la exponencial, que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcula la imagen de f.

9. Calcula la imagen de la función $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ dada para todo $x\neq 0$ por $f(x)=\operatorname{arc\,tg}(\ln|x|)$.
   Sugerencia. Ten en cuenta que $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} x=-\pi/2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\pi/2$.

10. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(0)=0$ y $f(x)=\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$, para todo $x\neq 0$. Estudia la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

11. Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ la función dada para todo $x\neq 1$ por $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x}$. Estudia la continuidad de f y los límites en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.